Concurso Público 2023 Docente EBTT

Edital nº 38/2023 - Etapa da Prova Escrita

MATEMÁTICA – PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 01 (10,0 pontos)

Uma empresa é capaz de produzir até dois tipos de produtos, A e B. A empresa deseja maximizar seu lucro diário total, sendo R$ 1,00 o lucro diário por cada unidade de A e R$ 4,00 o lucro diário por cada unidade de B. Para produzir cada unidade de A ela utiliza 2 horas de trabalho e 1 hora de tempo de máquina e para produzir cada unidade de B utiliza 1 hora de trabalho e 3 horas de tempo de máquina. Ela dispõe de 100 funcionários trabalhando 8 horas por dia e 1 200 horas de máquina por dia. Supondo que a empresa venda tudo o que produz por dia, utilizando as explicações matemáticas que se fizerem necessárias e suficientes para embasar suas conclusões, responda:

a) Qual a quantidade de cada produto que a empresa deve produzir diariamente para maximizar seu lucro diário? Nesse caso, qual o maior lucro diário possível? (5 Pontos)

b) Se em um determinado dia o lucro diário por cada unidade de A dobrar, qual a quantidade de cada produto que a empresa deve produzir diariamente para maximizar seu lucro diário? Nesse caso, qual o maior lucro diário possível? (5 Pontos)

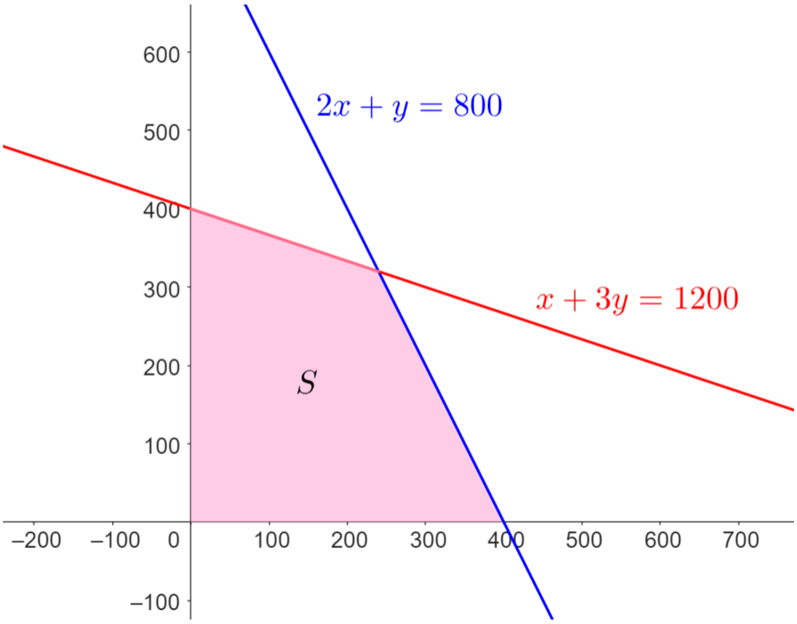
RESPOSTA:

**LETRA A:**
Seja $x$ a quantidade do produto do tipo A e $y$ a quantidade do produto do tipo B a ser produzida diariamente. Logo, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

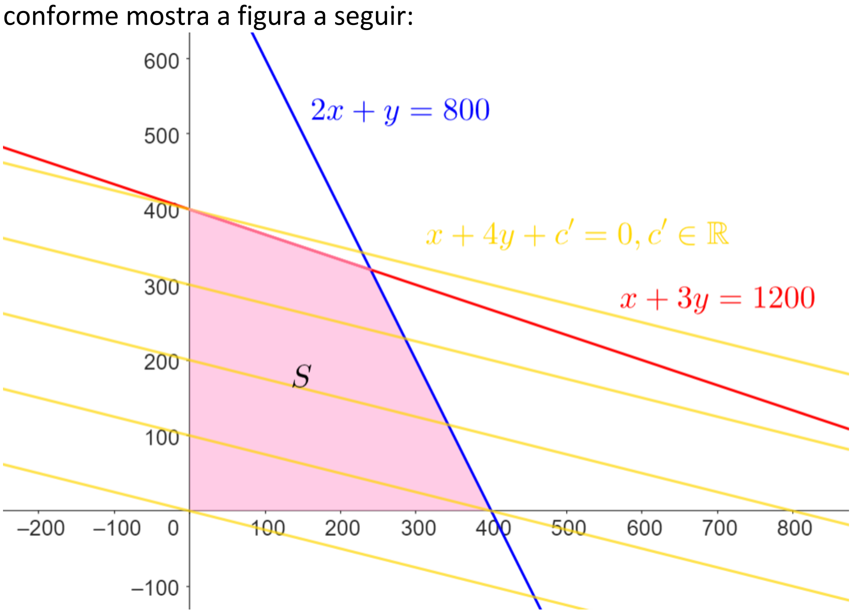
Sabe-se que a quantidade de horas de trabalho total disponível diariamente são 800 (100 funcionários trabalhando 8 horas por dia) e que para produzir cada unidade de A são utilizadas 2 horas de trabalho e para produzir cada unidade de B utiliza-se 1 hora de trabalho. Logo, $2x + y \leq 800$.

Sabe-se também que a quantidade de tempo de máquina total disponível diariamente são 1 200 e que para produzir cada unidade de A utiliza-se 1 hora de tempo de máquina e para produzir cada unidade de B são utilizadas 3 horas de tempo de máquina. Logo, $x + 3y \leq 1200$.

Portanto, a solução para o problema é um dos pontos do plano que satisfazem simultaneamente as inequações $S: \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 800 \\ x + 3y \leq 1200 \end{cases}$, conforme mostra a figura a seguir:

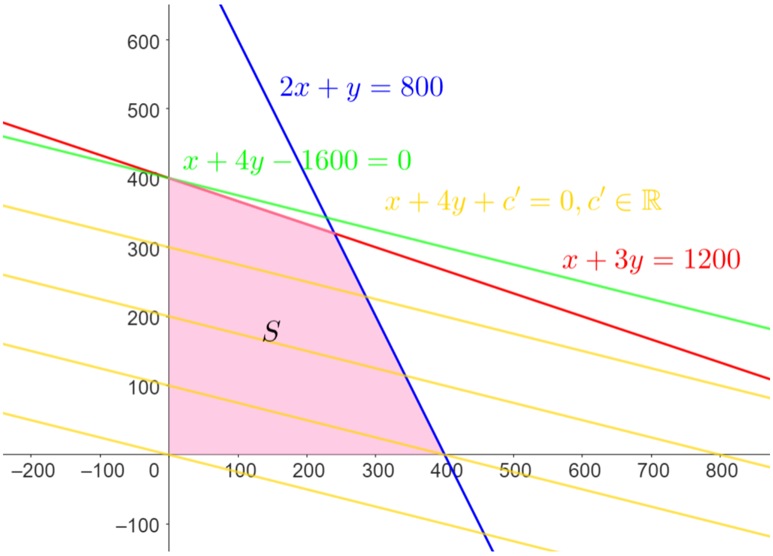



Sabe-se que o lucro diário por cada unidade de A é de R$ 1,00 e que o lucro diário por cada unidade de B é R$ 4,00. Logo, supondo que a empresa venda tudo o que produz por dia, o feixe de retas paralelas de equação $x + 4y + c' = 0$, com $c' \in R$, representa o lucro diário de $-c'$, conforme mostra a figura a seguir:

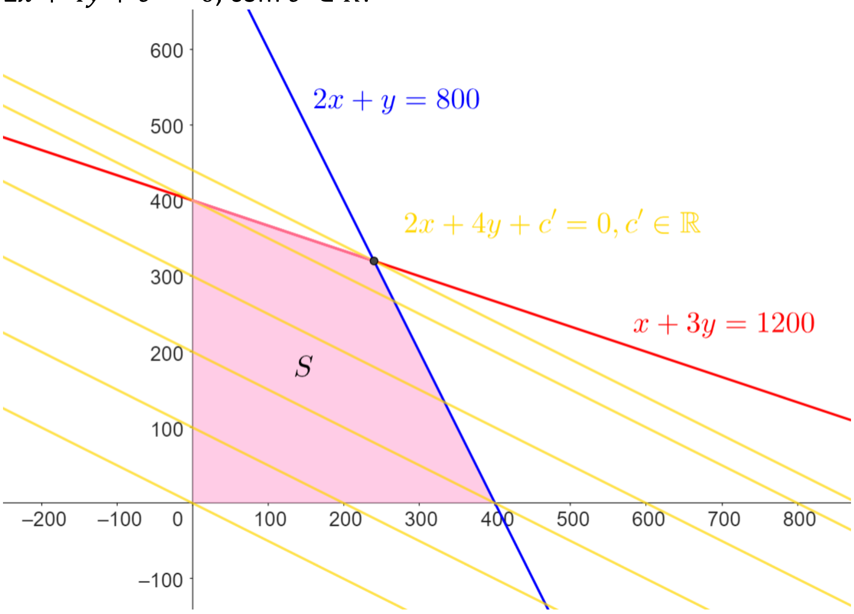



Portanto, basta determinar o par ordenado $(x, y) \in S$ que maximize $-c'$. Quanto maior o valor de $-c'$, maior é o valor que a reta de equação $x + 4y + c' = 0$ intersecta o eixo $y$. Logo, deve-se obter a reta $r$ do feixe de retas paralelas de equação $x + 4y + c' = 0$ que intersecta o eixo $y$ no maior valor possível tal que $r \cap S \neq \emptyset$. Esse maior valor possível é a interseção da reta $x + 3y = 1200$ com o eixo $y$, isto é, o par ordenado $(0{,}400)$. Assim, a reta $r$ do feixe de retas paralelas de equação $x + 4y + c' = 0$ que passa pelo ponto $(0{,}400)$ é $r: x + 4y - 1600 = 0$.

Dessa forma, a quantidade do produto do tipo A e do tipo B que a empresa deve produzir diariamente para maximizar seu lucro diário é 0 e 400, respectivamente, com o maior lucro diário de R$ 1 600,00.




**LETRA B:**
Nesse caso, o lucro diário por cada unidade de A passa a ser de R$ 2,00. Repete-se a mesma análise do item anterior, considerando agora o feixe de retas paralelas de equação $2x + 4y + c' = 0$, com $c' \in R$.

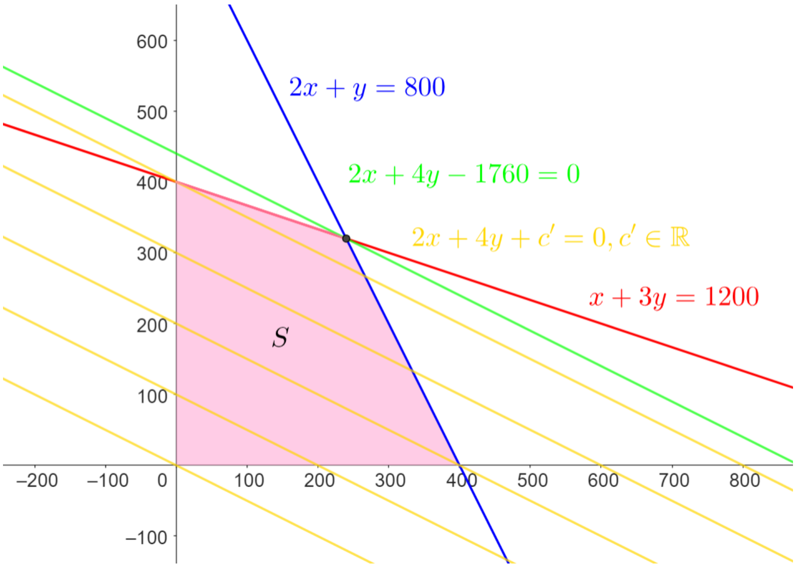



Assim, a reta $t$ do feixe de retas paralelas de equação $2x + 4y + c' = 0$ que intersecta o eixo $y$ no maior valor possível tal que $t \cap S \neq \emptyset$ é aquela que passa pela interseção

$$\begin{cases} x + 3y = 1200 \\ 2x + y = 800 \end{cases},$$

ou seja, o par ordenado $(240,320)$. Logo, a reta $t$ tem equação $2x + 4y - 1760 = 0$.

Dessa forma, a quantidade do produto do tipo A e do tipo B que a empresa deve produzir diariamente para maximizar seu lucro diário é 240 e 320, respectivamente, com o maior lucro diário de R$ 1 760,00.




QUESTÃO 02 (10,0 pontos)

Considere a equação de uma elipse com centro na origem do plano cartesiano com eixo maior sobre o eixo $x$ medindo $2a$ e eixo menor sobre o eixo $y$ medindo $2b$.

Calcule, em função dos parâmetros $a$ e $b$, a área da superfície do elipsoide obtido girando essa elipse em torno do eixo $x$. Todas as integrais envolvidas na resolução dessa questão devem estar totalmente resolvidas.

RESPOSTA

A equação de uma elipse com centro na origem do plano cartesiano com eixo maior sobre o eixo $x$ medindo $2a$ e eixo menor sobre o eixo $y$ medindo $2b$ é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $a > b$. A fórmula da área da superfície obtida pela rotação dessa curva em torno do eixo $x$ é:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Assim:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y(dy/dx)}{b^2} = -\frac{x}{a^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \Rightarrow$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} = \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^4 y^2} =$$

$$\frac{b^4x^2 + a^4b^2\left(1 - x^2/a^2\right)}{a^4b^2\left(1 - x^2/a^2\right)} = \frac{a^4b^2 + b^4x^2 - a^2b^2x^2}{a^4b^2 - a^2b^2x^2}$$

$$= \frac{a^4 + b^2x^2 - a^2x^2}{a^4 - a^2x^2} = \frac{a^4 - \left(a^2 - b^2\right)x^2}{a^2\left(a^2 - x^2\right)}$$

A área da superfície do elipsoide é o dobro da área gerada pela rotação da parte da elipse localizada no primeiro quadrante em torno do eixo $x$. Logo,

$$S = 2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = 4\pi\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\frac{\sqrt{a^4 - \left(a^2 - b^2\right)x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4 - \left(a^2 - b^2\right)x^2}dx$$

Fazendo $u = \sqrt{a^2 - b^2}x$ tem-se:

$$\frac{4\pi b}{a^2}\int_0^{a\sqrt{a^2-b^2}} \sqrt{a^4 - u^2}\frac{du}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}}\left[\frac{u}{2}\sqrt{a^4 - u^2} + \frac{a^4}{2}arcsen\left(\frac{u}{a^2}\right)\right]_0^{a\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}}\left[\frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{2}\sqrt{a^4 - a^2\left(a^2 - b^2\right)} + \frac{a^4}{2}arcsen\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)\right]$$

$$= 2\pi\left[b^2 + \frac{a^2b\ arcsen\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right]$$

<u>QUESTÃO 03 (12,5 pontos)</u>

Prove pelo Princípio de Indução Matemática que todo número natural da forma $6^n-1$ é divisível por 5

RESPOSTA:

Considere a proposição $P_n$: $6^n - 1$ é divisível por 5 para todo inteiro $n \geq 1$.

(i) Para n=1, temos que $6^1 - 1 = 5$ é divisível por 5, logo $P_1$ é verdadeira.

(ii) Suponha $P_n$ verdadeira para n=k; isto é: $6^k - 1$ divisível por 5.(hipótese de indução)

(iii) $6^{k+1}-1=6^k.6-1=6(6^k-1)+6-1=6(6^k-1)+5$

(iv) Por hipótese, $P_k:6^k-1$ divisível por 5. Logo, $6(6^k-1)+5$ também é divisível por 5; ou seja, $P_{k+1}$ é verdadeira.

(v) Assim, pelo Princípio de Indução Matemática, $6^n-1$ é divisível por 5 para todo inteiro $n\geq 1$

QUESTÃO 04 (10,0 pontos)

Considere a função r $y = f\circ g(x) = \frac{[g(x)]^2-1}{[g(x)]^2+1}$ sendo $g(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$

a) determine dy/dx (5 pontos)

b) Determine a inclinação da reta normal ao gráfico de no ponto de abscissa √7 (5 pontos)

RESPOSTA

**LETRA A:**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{[2g(x).g'(x)][(g(x))^2+1]-[(g(x))^2-1][2g(x).g'(x)]}{[(g(x))^2+1]^2}=\frac{4g(x).g'(x)}{[(g(x))^2+1]^2}$$

Como $g(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$, temos que $g'(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}.2x$ e

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}}{3\left[\left((x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right)^2+1\right]^2}=\frac{8x}{3\left[(x^2+1)^{\frac{2}{3}}+1\right]^2(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}$$

**LETRA B:**

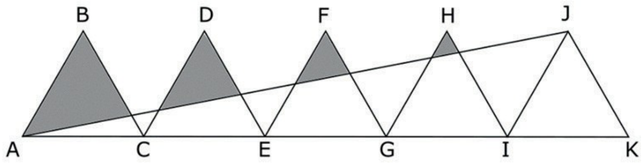
Determine a inclinação da reta normal ao gráfico de $f\circ g$ no ponto de abcissa $\sqrt{7}$.
Resolução:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{7}}==\frac{8.\sqrt{7}}{3\left[((\sqrt{7})^2+1)^{\frac{2}{3}}+1\right]^2\left((\sqrt{7})^2+1\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{8.\sqrt{7}}{3\left[((8)^{\frac{2}{3}}+1\right]^2(8)^{\frac{1}{3}}}=\frac{4\sqrt{7}}{75}$$ (coeficiente angular da reta tangente).

Coeficiente angular da normal: $tg\theta=-\frac{75}{4\sqrt{7}}=-\frac{75\sqrt{7}}{28}\Rightarrow\theta=arctg-\frac{75\sqrt{7}}{28}$

QUESTÃO 05 (10,0 pontos)

Na figura, os triângulos equiláteros ABC, CDE, EFG, GHI e IJK têm, cada um, área *S*, AJ é um segmento de reta e os pontos A, C, E, G, I e K estão alinhados.




Assim, determine, em função de *S*, a área sombreada.

RESPOSTA

1) Trace um segmento passando por B, D, F, H e J e outro segmento a partir do ponto A de modo que esses segmentos se interceptem num ponto P e que PB seja congruente a AB. Assim será formado um triângulo ABP.

2) Considere que a medida do segmento AB seja $L$. Assim, a área de cada triângulo equilátero da hipótese é $S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$.

3) Considere M o ponto de interseção de BC e AJ , Q o ponto de interseção de CD e AJ, N o ponto de interseção de DE e AJ, R o ponto de interseção de FE e AJ, O o ponto de interseção de FG e AJ, T o ponto de interseção de HG e AJ e U o ponto de interseção de HI e AJ.

4) Verifique que os triângulos PAJ, BMJ, DNJ, FOJ, e HUJ são semelhantes

5) Conclua que PB=BD=DF=FH=HJ e que AP=L

6) Use 4) e 5) e conclua que HU=L/5, FO=2L/5, DN=3L/5 e BM=4L/5

7) Da mesma forma, verifique que os triângulos ABJ, QDJ, RFJ, THJ são semelhantes e que BD=DF=FH=HJ. Assim, como AB=L, temos que HT=L/4, FR= 2L/4 e DQ=3L/4.

8) As áreas hachuradas serão $\frac{L^2\sqrt{3}}{5}$, $\frac{9L^2\sqrt{3}}{80}$, $\frac{L^2\sqrt{3}}{20}$, $\frac{L^2\sqrt{3}}{80}$ e sua soma será igual a

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{5} + \frac{9L^2\sqrt{3}}{80} + \frac{L^2\sqrt{3}}{20} + \frac{L^2\sqrt{3}}{80} = \frac{3}{2} . \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}S$$

QUESTÃO 06 (15,0 pontos)

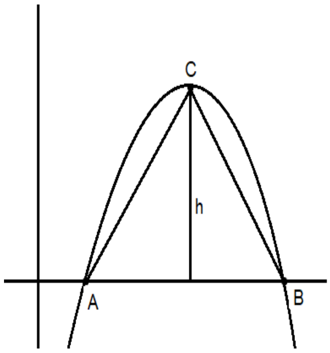
A função quadrática de equação *f(x)=ax*$^2$*+bx+c*, com *a*, *b* e *c* reais e *a*<0, possui duas raízes reais distintas.

a) Determine o valor de Δ para que o triângulo formado pelo vértice da parábola e pelos pontos onde
o gráfico de *f(x)* intercepta o eixo das abscissas seja equilátero. (7,5 Pontos)

b) Determine os valores de *a*, *b* e *c* para que o triângulo equilátero do item anterior tenha área igual a 12√3 e o vértice da parábola, gráfico de *f(x)*, esteja sob o eixo *y*. (7,5 Pontos)

**LETRA A:**

(1) determinar a medida da altura do triângulo ABC formado (figura auxiliar) usando as coordenadas do vértice do gráfico de f(x).




Como a coordenada de C é dada por $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$, temos que a altura $h_t$ do triângulo ABC é igual a $h_t = \left|\frac{-\Delta}{4a} - 0\right| = \frac{\Delta}{4a}$. Sendo ABC equilátero, a altura $h_t = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\Delta}{4a}$ (1).

(2) Encontre a medida do lado do triângulo ABC (pode-se calcular a medida de qualquer um dos lados, por facilidade, a medida de AB)

Temos que a medida do lado de ABC é dado por

$$med(AB) = \left|\frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} - \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a}\right| = \left|\frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \quad (2)$$

(3) Substituir a medida do lado encontrado em (2) na fórmula da altura dada em (1)

$\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{a}.\sqrt{3}}{2} = \frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \frac{2\Delta}{4a} = \frac{\sqrt{3\Delta}}{a} \Rightarrow \frac{\Delta}{2} = \sqrt{3\Delta} \Rightarrow \Delta^2 - 12\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 12$. Lembrar que, de acordo com enunciado, $\Delta > 0$.

Resposta do item a: $\Delta = 12$

**LETRA B:**

(1) Sabe-se que a área do triângulo equilátero é dado por $S_{ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Como temos o valor da área (informação dada), medida do lado encontrado no item a e o valor de $\Delta$, substituir esses valores na fórmula da área de ABC.

$$S_{ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \Rightarrow \frac{12}{a^2} = 48 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}.$$

De acordo com enunciado o valor de $a < 0$, temos que a = -1/2.

(2) Para encontrar a equação de f(x), sabemos que o vértice da parábola está sob o eixo y (informação dada), logo b = 0. O valor de c é dado pela ordenada do vértice, então

$$c = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-12}{4\left(\frac{-1}{2}\right)} = 6.$$

Assim a equação de $f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 6$

QUESTÃO 06 (12,5 pontos)

Considere os três conteúdos matemáticos para o ensino médio: i) áreas de figuras planas; ii) juros simples e compostos; e iii) probabilidade. Considere, também, três tendências para o Ensino de Matemática: a) Resolução de Problemas; b) Investigação Matemática; e c) Modelagem Matemática.

Apoiando-se na literatura listada nas referências bibliográficas deste concurso, proponha uma estratégia de ensino de um dos conteúdos i, ii ou iii orientada por uma das tendências a, b ou c.

a) Elabore a proposta de forma sintetizada contendo, no mínimo, informações como número de aulas, público alvo, pré-requisitos, avaliação, recursos necessários. (10 Pontos)

b) Escreva de forma breve uma justificativa para a escolha, dentre as opções disponíveis, comentando sobre suas expectativas, potencialidades e limitações a respeito da estratégia traçada. (10 Pontos)

RESPOSTA

**LETRA A:**
Nesse item, espera-se do candidato uma argumentação concisa e consistente ao propor a sua estratégia. Não há combinação preferencial de conteúdo escolhido com metodologia proposta, porém é importante fazer a defesa da escolha, qualquer que seja, por meio de uma argumentação que dialogue com a literatura, e não se encerre em impressões e senso comum. Os itens listados no enunciado, no mínimo, devem estar presentes na resposta e com viabilidade adequada. Deve haver coesão entre as etapas do processo, sempre com foco na fundamentação teórica pertinente.

**LETRA B:**
A resposta deve ser completa, no sentido de conter ao menos os aspectos presentes no enunciado. Deve haver coerência entre a proposta do item A e a reflexão no item B. Não é adequada uma reflexão genérica, mas sim uma conexão coerente com o conteúdo e a estratégia escolhidos, em diálogo constante com a literatura da área.

QUESTÃO 08 (12,5 pontos)

Qual o papel da avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

RESPOSTA:

O papel da avaliação na MEAAMaRP (metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da  Resolução de Problemas) é formativo, contrapondo-se aos propósitos somativos da avaliação tradicionalmente realizada. É uma concepção de avaliação para a aprendizagem e não da aprendizagem. Por isso, a avaliação é integrada aos processos de ensino e de aprendizagem.

O professor tem que fixar foco na compreensão dos estudantes, enquanto o processo de ensino flui, para que possa coletar dados. O papel da avaliação é dinâmico por exigir que o professor observe as ações e os discursos de alunos e os interprete para realizar uma descrição mais acurada de seu raciocínio. Assim, o professor pode intervir instantaneamente (ou quase instantaneamente) no processo de ensino para otimizar a aprendizagem. A avaliação, na MEAAMaRP, permite o desenvolvimento da autogestão da aprendizagem do aluno enquanto essa metodologia possibilita a coavaliação entre os pares ao favorecer uma interação entre os estudantes que pode desencadear uma reestruturação dos processos cognitivos durante a construção do conhecimento.

Resumindo, o papel da avaliação na MEAAMaRP é um papel formativo que impacta diretamente na aprendizagem do aluno por estar integrada ao processo de ensino-aprendizagem e permitir que a avaliação não fique restrita a “avaliação do professor”, ao incluir em seu âmago a autoavaliação e a coavaliação.